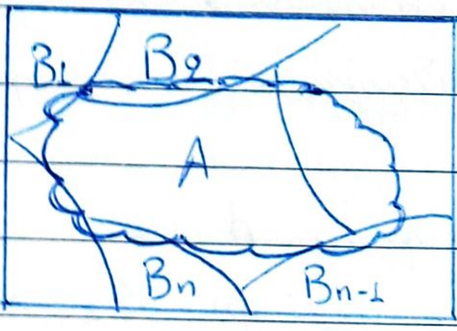
1/11/19

Πολ/κη Αρχή:

$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$

Θ.Ο.Π.:

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$



"Όταν ένα ενδεχόμενο A εξαρτάται από άλλα B_i, $i=1,2,\dots,n$ ενδεχόμενα."

Άσκηση:

Σε έναν φοιτητή δίνονται 100 ερωτήσεις από τις οποίες διαλέγει και απαντά σε 3. Ο φοιτητής θα περάσει το μάθημα εάν απαντήσει σωστά και στις 3 ερωτήσεις. Αν ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση 90 ερωτήσεων, ποια η πιθανότητα να περάσει το μάθημα;

Λύση:

Έστω A_i το ενδεχόμενο ο φοιτητής να απαντήσει σωστά στην i-ερώτηση, $i=1,2,3$. Άρα,

$$P(A) = P\left(\begin{array}{l}\text{Ο φοιτητής να απαντήσει} \\ \text{σωστά και στην 1η και} \\ \text{στην 2η και στην 3η}\end{array}\right) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{90}{100} \cdot \frac{89}{99} \cdot \frac{88}{98}$$

Άλλος τρόπος:

$$\frac{\binom{90}{3}}{\binom{100}{3}}$$

Άσκηση:

Διαλέγουμε στην τύχη ένα συρτάρι και παίρνουμε ένα αντικείμενο από το συρτάρι.

3 βιβλία, 8 CD	
6 CD, 4 τσιγάρα	

α) Ποια η πιθανότητα να πάρουμε βιβλίο;

β) Ποια η πιθανότητα να πάρουμε CD;

Λύση:

Έστω ενδεχόμενο A να διαλέξουμε βιβλίο, B_1 να διαλέξουμε το πρώτο συρτάρι, B_2 να διαλέξουμε το δεύτερο συρτάρι, CD να διαλέξουμε CD.

α) $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \cancelto{0}{P(A|B_2)}\cdot P(B_2) = \frac{3}{11}\cdot\frac{1}{2} + \frac{0}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{22}$

β) $P(CD) = P(CD|B_1)\cdot P(B_1) + P(CD|B_2)\cdot P(B_2) = \frac{8}{11}\cdot\frac{1}{2} + \frac{6}{10}\cdot\frac{1}{2}$

Άσκηση: (Πρόβλημα κλειδιών)

Από n-κλειδιά μόνο το ένα ανοίγει μία πόρτα. Τα κλειδιά δοκιμάζονται το ένα μετά το άλλο χωρίς να χρησιμοποιείται κλειδί που έχει χρησιμοποιηθεί. Ποια είναι η πιθανότητα η πόρτα να ανοίξει στην κ-δοκιμή $k=1,2,\dots,n$. (Δηλ να μην ανοίξει στην 1η και να μην ανοίξει στην 2η και... και να μην ανοίξει στην κ-1 και να ανοίξει στην κ-δοκιμή.)

Λύση:

Έστω A_i το ενδεχόμενο να επιλέγεται το σωστό κλειδί στην i-δοκιμή, δηλ η πόρτα να ανοίγει στην i-δοκιμή.

Ζητούμενη πιθανότητα:

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c \cap A_k) \xrightarrow[\text{αρχη}]{\text{πολ/κη}}$$

$$= P(A_1^c)\cdot P(A_2^c|A_1^c)\cdot P(A_3^c|A_1^c \cap A_2^c)\cdot \ldots \cdot P(A_{k-1}^c|A_1^c \cap \dots \cap A_{k-2}^c)\cdot P(A_k|A_1^c \cap \dots \cap A_{k-1}^c)$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n} \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

Νόμος ή Κανόνας του Bayes:

(Δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού $P(B_i|A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$)

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \overset{\Theta O\Pi}{=} \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Άσκηση:

Έστω δύο νομίσματα. Το ένα είναι άσπρο και η πιθανότητα να είναι κορώνα όταν ριχθεί είναι ίση με $\frac{1}{2}$. Το δεύτερο είναι μαύρο και η πιθανότητα να είναι κορώνα είναι ίση με $\frac{1}{3}$.

α) Ένα νόμισμα επιλέγεται στην τύχη και ρίχνεται μία φορά. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι κορώνα το αποτέλεσμα;

β) Ένα νόμισμα επιλέγεται στην τύχη, ρίχνεται και εμφανίζεται κορώνα. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει επιλεχθεί το μαύρο νόμισμα;

Λύση:

Έστω K το ενδεχόμενο το αποτέλεσμα να είναι κορώνα, B_1 το ενδεχόμενο να έχει επιλεχθεί το άσπρο νόμισμα, B_2 το ενδεχόμενο να έχει επιλεχθεί το μαύρο νόμισμα.

α) $P(K) \overset{\Theta O\Pi}{=} P(K|B_1) \cdot P(B_1) + P(K|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}417$

β) $P(B_2|K) \overset{Bayes}{=} \frac{P(K|B_2)P(B_2)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{0{,}417} = 0{,}4$

Απόδειξη Bayes

$$P(B_i|A) \underset{o\rho}{=} \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \overset{o\rho}{=} \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

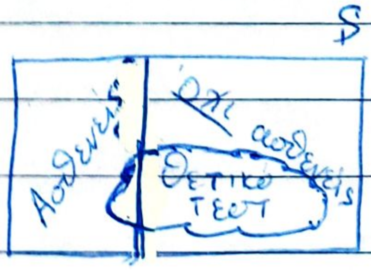
Άσκηση:

Για την διάγνωση μιας ασθένειας γίνεται ένα διαγνωστικό τεστ το οποίο είναι θετικό στο 80% των περιπτώσεων που ένα άτομο παρουσιάζει την ασθένεια και επίσης στο 10% των περιπτώσεων που ένα άτομο δεν παρουσιάζει την ασθένεια. Έστω, επίσης, το 1% του πληθυσμού έχει την ασθένεια. Ένα άτομο υποβάλλεται στο διαγνωστικό τεστ. Ποια είναι η πιθανότητα

α) Το τεστ να είναι θετικό;

β) Το άτομο να έχει την ασθένεια δεδομένου ότι το τεστ είναι θετικό;

Λύση:



Έστω A το ενδεχόμενο το τεστ να είναι θετικό, B_1 το ενδεχόμενο το άτομο να έχει την ασθένεια και B_2 το ενδεχόμενο το άτομο να μην έχει την ασθένεια.

Γνωρίζουμε ότι:

$P(A|B_1)=0{,}8$, $P(A|B_2)=0{,}1$, $P(B_1)=0{,}01$, $P(B_2)=1-P(B_1)=0{,}99$

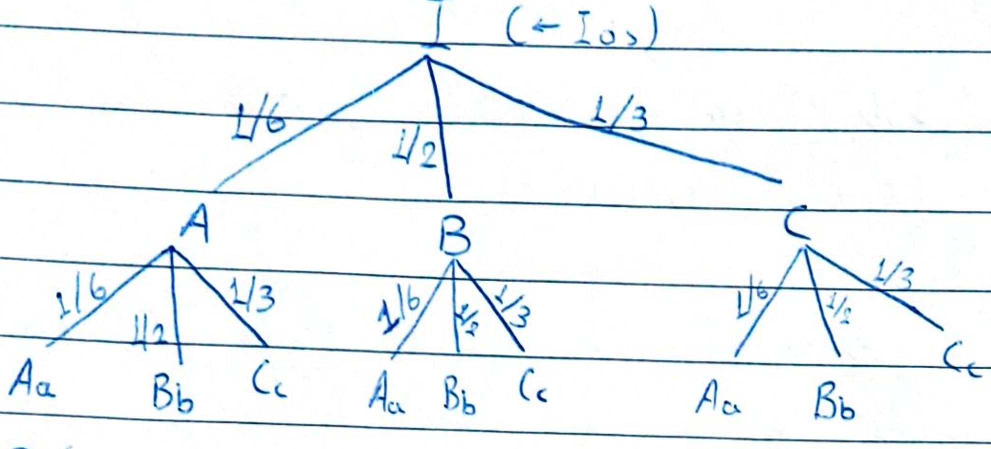
α)

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$
$$=0{,}8\cdot 0{,}01+0{,}1\cdot 0{,}99$$
$$=0{,}107$$

β)

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A)}=\frac{0{,}8\cdot 0{,}01}{0{,}107}=0{,}075.$$

Άσκηση:



α) P(ο ιός I να μεταλλαχθεί τελικά σε Bb);

β) P(πρώτη μετάλλαξη να είναι C | ο I μεταλλάχθηκε σε Bb);

Λύση:

α)

$$P(\dots) \overset{ΘΟΠ}{=\!=} P(Bb|A)P(A) + P(Bb|B)\cdot P(B) + P(Bb|C)\cdot P(C)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

β)

$$P(\dots) \overset{Bayes}{=\!=} \frac{P(Bb|C)\cdot P(C)}{P(Bb)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Παρατήρηση: $P(C|Bb) = \frac{1}{3} = P(C)$

i) $P(A|B) > P(A)$

ii) $P(A|B) < P(A)$

iii) $P(A|B) = P(A)$

Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Υπάρχουν περιπτώσεις (βλ. προηγ. άσκηση) όπου $P(A|B) = P(A)$

Βασική σχέση που δηλώνει ανεξαρτησία των A κ B

$$P(A|B) \overset{op}{=} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \overset{\text{ανεξ}}{=} P(A) \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

• <u>Ορισμός:</u> Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χπ και $A, B \in \mathcal{A}$. Τα A, B ονομάζονται ανεξάρτητα αν-ν $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

• <u>Ορισμος:</u> Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χπ και $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Τα $A_1, \dots, A_n$ ονομάζονται ανεξάρτητα αν για κάθε υποσύνολο $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ δεικτών του $\{1, 2, \dots, n\}$ $k = 2, \dots, n$ ισχύει:

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdot \dots P(A_{i_k})$$

• <u>Ορισμός:</u> Έστω $A, B, \Gamma \in \mathcal{A}$. Τα A, B, Γ ονομάζονται ανεξάρτητα αν-ν:

- $P(A\cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A\cap \Gamma) = P(A)P(\Gamma)$
- $P(B\cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma)$
- $P(A\cap B\cap \Gamma) = P(A)P(B)\cdot P(\Gamma)$

Θέλουμε να είναι ανεξάρτητα ανά δύο

<u>Παραδείγματα:</u>

Ένα τέλειο νόμισμα ρίχνεται 3 φορές. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_i = \{$το αποτέλεσμα της i-ρίψης να είναι κορώνα$\}$, $i = 1, 2, 3$. Είναι τα A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα;

<u>Λύση:</u>

$S = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

• $P(A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

• $P(A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

• $P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$

- $P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3)$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8}$

Παρατηρούμε ότι $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_2)$.

- $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3)$
- $P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3)$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Άσκηση:

Ένα νόμισμα ρίχνεται n-φορές Η πιθανότητα του ενδεχομένου το αποτέλεσμα να είναι "γράμματα" είναι ίση με p, $0<p<1$. Οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες;

Λύση:

$$P\begin{pmatrix}\text{εμφάνιση τουλάχιστον} \\ \text{μια φορά της όψης } \Gamma\end{pmatrix} = 1 - P\begin{pmatrix}\text{καμία φορά} \\ \text{η όψη } \Gamma\end{pmatrix} = 1 - P(K \cap K \cap \dots \cap K) =$$

$$= 1 - P(K \dots K) \overset{\text{ανεξ}}{=} 1 - \underbrace{P(K) \dots P(K)}_{n\text{-φορές}} = 1 - (1-p)^n$$

επανάληψη τυχαίας διαδικασίας

Η 2η ρίψη δεν εξαρτάται από την 1η.